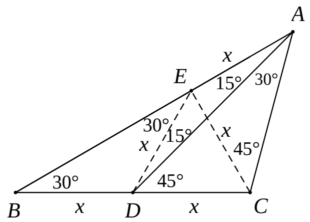
第十一屆“走進美妙的數學花園”全國青少年數學論壇
數學解題技能展示

八年級初賽 A 卷

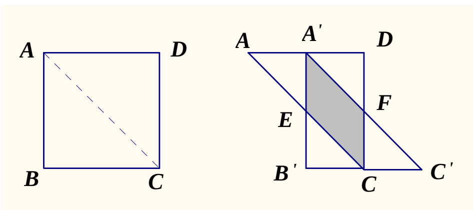
1.方程 $\frac{8}{x^2-4}=\frac{2}{x-2}+1$ 的解是_______.
【答案】$x=-4$.
【解析】去分母化簡，得 $x^2+2x-8=0$.解得 $x=-4$ 或 $x=2$ (舍去).

2.記 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$ 的整數部分為 a，小數部分為 b，則 $a^2+b^2+\frac{1}{2}ab=$_______.
【答案】5.
【解析】因為 $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)=2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$，$a=2,b=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$，
所以 $a^2+b^2+\frac{1}{2}ab=4+b\left(b+1\right)=4+\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\times\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)=4+1=5$.

3.已知△ABC 中，$\angle A=45°,\angle B=30°,AD$ 是中線，則 $\angle ADC$ 的大小是_______.
【答案】$45°$.
【解析】如圖，作 $CE\perp AB$，利用直角三角形和等腰三角形的性質，易知 $\angle ADC=45°$.



4.如圖，將邊長為 4 cm 的正方形 $ABCD$ 沿其對角線 AC 剪開，再把△ABC 沿著 AD 方向平移，得到△$A'B'C'$，若兩個三角形重疊部分的面積是 4cm^2，則△ABC 移動的距離等於_______cm.



【答案】2.
【解析】設 $AA'=CC'=x$，則 $CF=x,B'C=4-x$.
平行四邊形 $CFA'E$ 的面積 $x\left(4-x\right)=4$，解得 $x=2$.
即△ABC 移動的距離等於 2cm.

5.在直角坐標系中，有三個點 $A(-4，-2)$，$B(0，2)$， $C(a，a)$，當△ABC 的周長最短時，實數 a 的值是_______.
【答案】-1.
【解析】作點 $B(0，2)$關於直線 $y=x$ 的對稱點 $B'\left(2,0\right)$，當點 C 為直線 AB' 與直線 $y=x$ 的交點，即線段 AB' 的中點 $\left(-1,-1\right)$ 時，△ABC 的周長最短.

6.從邊長為 1 的正方形的中心和頂點這五個點中，隨機選取兩點.兩點之間的距離為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是_______.

【答案】$\frac{2}{5}$.

【解析】五個點隨機選取兩點，有 10 種選法，其中兩點之間距離為 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的選法有 4 種，故所求概率為 $\frac{2}{5}$.

7.已知對任意的正整數 n ，$\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ 都能寫成 $\sqrt{m}+\sqrt{m+1}$ 的形式，其中 m 是正整數.則當 $n=4$ ，對應的 $m=$_______.

【答案】288.

【解析】$\left(1+\sqrt{2}\right)^4=\left(3+2\sqrt{2}\right)^2=17+12\sqrt{2}=\sqrt{289}+\sqrt{288}$ ，故 $m=288$.

8.已知方程 $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$ 有兩個實根，則實數 a 的取值範圍是_______.

【答案】$-\frac{1}{4}\le a<\frac{3}{4}$.

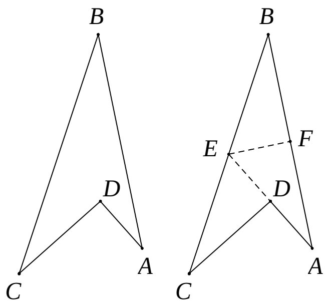
【解析】方程左邊分解因式，得 $(x^2+x+1-a)(x^2-x-a)=0$.

若 $x^2+x+1-a=0$，當 $a<\frac{3}{4}$ 時，該方程無實根；當 $a\ge\frac{3}{4}$ 時，該方程有兩個實根.

若 $x^2-x-a=0$，當 $a<-\frac{1}{4}$ 時，該方程無實根；當 $a\ge-\frac{1}{4}$ ，該方程有兩個實根.

因此，當 $-\frac{1}{4}\le a<\frac{3}{4}$ 時，原方程恰有兩個實根.

9.如圖，在“飛鏢”形 $ABCD$ 中， $AB=4\sqrt{3}$ ， $BC=8$ ， $\angle A=\angle B=\angle C=30°$ ，則 AD=_______.



【答案】2.

【解析】延長 AD ，交 BC 於點 E ，作 $EF\perp AB$ ，垂足為 F .

由 $\angle A=\angle B=30°$ ，知 $\triangle ABE$ 是等腰三角形， $AE=BE$ ， $AF=BF=2\sqrt{3}$.

由 $\triangle BEF$ 是含 $30°$ 角的直角三角形，知 $EF=2, BE=4$ ，從而 $CE=4$.

由 $\triangle CDE$ 中 $\angle C=30°$ ， $\angle CED=\angle A+\angle B=60°$ ，

知 $\triangle CDE$ 是含 $30°$ 角的直角三角形， $DE=\frac{1}{2}CE=2$.

從而 $AD=AE-DE=BE-DE=2$.

10.已知 $a>b, a+b=2$ ，則 $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ 的最小值是_______.

【答案】2.

【解析】設 $a=1+t, b=1-t$ ，其中 $t>0$.

則 $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}=\dfrac{\left(1+t\right)^2+\left(1-t\right)^2}{2t}=\dfrac{t^2+1}{t}\ge\dfrac{\left(t-1\right)^2}{t}+2\ge 2$.

當且僅當 $t=0, a=b=1$ 時，$\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ 的最小值是 2.

11.已知恒等式 $\dfrac{x^2-x+2}{x(x-3)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{x+2}$ ，則 ABC=_______.

【答案】$-\dfrac{32}{225}$.

【解析】去分母，得 $x^2-x+2=A(x-3)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-3)$.

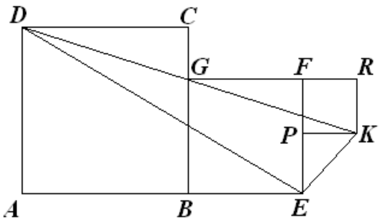
當 $x=0$ 時，$2=-6A$，得 $A=-\dfrac{1}{3}$ ；

當 $x=3$ 時，$8=15B$，得 $B=\dfrac{8}{15}$ ；

當 $x=-2$ 時，8= $10C$，得 $C=\dfrac{4}{5}$ ．

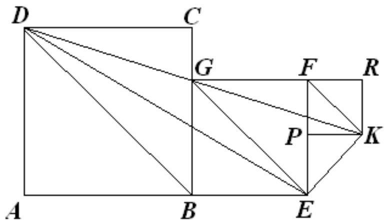
故 ABC=$-\dfrac{32}{225}$.

12.如圖，四邊形 *ABCD*，四邊形 *BEFG*，四邊形 *PKRF* 均是正方形，若正方形 *BEFG* 的邊長是 2，則△*DEK* 的面積是_______.



【答案】4.

【解析】如圖，由 $DB // GE // FK$ ，知 $S_{\Delta DEK}=S_{\Delta DGE}+S_{\Delta EGK}=S_{\Delta BGE}+S_{\Delta EGF}=S_{BEFG}=4$.



13.設 a,b 是不全為零的相異實數，已知方程 $x^2+ax+b=0$ 的兩根恰好為 a,b ，則 $ab=$______ ·

【答案】-2.

【解析 1】由條件知 $\begin{cases}a^2+a^2+b=0,\\ b^2+ab+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-2a^2,\\ b\left(b+a+1\right)=0.\end{cases}$

若 $b=0$ ，則 $a=0$ ，與已知條件矛盾.

故 $b\ne 0$ ， $b+a+1=0$ ，這表明方程 $x^2+ax+b=0$ 有一根為 1，即 $a=1$ 或 $b=1$.

因 $b=-2a^2<0$ ，故只能是 $a=1$ ，從而 $b=-2$.

所以 $ab=-2$.

【解析 2】由條件知 $\begin{cases}a^2+a^2+b=0,\\ b^2+ab+b=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}b=-2a^2,\\ b\left(b+a+1\right)=0.\end{cases}$

若 $b=0$ ，則 $a=0$ ，與已知條件矛盾.

故 $b\ne 0$ ， $b+a+1=0$ ， $-2a^2+a+1=0$ ，解得 $a=1$ 或 $a=-\dfrac{1}{2}$.

從而$\begin{cases}a=1,\\b=-2\end{cases}$或$\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$（舍去）.

故$a=1,b=-2$，$ab=-2$.

14.若實數m,n,p,q滿足條件$m+n+p+q=22$，$mp=nq=100$，則$\sqrt{(m+n)(n+p)(p+q)(q+m)}$的值是_______.

【答案】220.

【解析】由已知條件消去p,q，得

$p=\dfrac{100}{m}$，$q=\dfrac{100}{n}$，$m+n+\dfrac{100}{m}+\dfrac{100}{n}=22$，$(m+n)\left(1+\dfrac{100}{mn}\right)=22$，$1+\dfrac{100}{mn}=\dfrac{22}{m+n}$，

所以$(m+n)(n+p)(p+q)(q+m)$

$=(m+n)\left(n+\dfrac{100}{m}\right)\left(\dfrac{100}{m}+\dfrac{100}{n}\right)\left(\dfrac{100}{n}+m\right)$

$=100^2(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)n\left(1+\dfrac{100}{mn}\right)m\left(\dfrac{100}{mn}+1\right)$

$=100^2(m+n)\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)mn\left(\dfrac{22}{m+n}\right)\left(\dfrac{22}{m+n}\right)$

$=100^2\times 22^2$，

故原式=220.

【說明】上述解答過程中三處100^2應改為 100.

15.已知正整數x,y,z,s滿足$x+y+z=s,xy=zs$，且存在一個邊長為整數的直角三角形，其面積為$4xy$.試寫出一組這樣的正整數(x,y,z,s)：_______.

【答案】如$(2,3,1,6)$，全部答案為$(2n,3n,n,6n)$或$(3n,2n,n,6n)$，其中n為任意正整數.

【解析】由$xz+yz+z^2=zs=xy$，得$z^2+(x+y)z-xy=0$.

因該方程有整數解z，故$\Delta=(x+y)^2+4xy$為完全平方數.

記$(x+y)^2+4xy=k^2$，其中k為正整數，且$k>x+y$.

不妨設x,y互質(否則,假定$x=mx',y=my'$,其中m,x',y'均為正整數，$m=(x,y)$，則$\Delta=m^2\left[(x'+y')^2+4x'y'\right]$為完全平方數，$(x'+y')^2+4x'y'$亦是完全平方數，其中$x',y'$互質),則$4xy=(k+x+y)(k-x-y)$，左邊為偶數，則右邊為偶數，因$(k+x+y)$與$(k-x-y)$同奇偶，故$(k+x+y)$與$(k-x-y)$同為偶數，則$xy=\left(\dfrac{k+x+y}{2}\right)\left(\dfrac{k-x-y}{2}\right)$.

因x,y互質，故$\dfrac{k+x+y}{2}=xy,\dfrac{k-x-y}{2}=1$.

從而$k=x+y+2$, $xy=\dfrac{k+x+y}{2}=x+y+1,(x-1)(y-1)=2$.

於是$x-1=2,y-1=1$或$x-1=1,y-1=2$，即$x=3,y=2$或$x=2,y=3$.

從而$z^2+5z-6=0$，$z=1$或$z=-6$(舍去)，$s=x+y+z=6$.

於是$(x,y,z,s)=(2,3,1,6)$或$(3,2,1,6)$.

考慮到x,y不一定互質，故$(x,y,z,s)=(2n,3n,n,6n)$或$(3n,2n,n,6n)$，其中n為任意正整數，對應的直角三角形的三條邊長為$(6n,8n,10n)$或$(8n,6n,10n)$.